



Gruppo di lavoro sulle tecniche
di insegnamento e di apprendimento

<https://riviste.unige.it/index.php/glia/index>
2975-0075

N° 5 - Anno 2026
pp.1-28

Didattica laboratoriale e costruzioni geometriche

Un'esperienza nel corso di Matematiche Complementari

Giancarlo ARTIANO¹, Maria MELLONE², Tiziana PACELLI³

*Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli Federico II (NA)*

1 giancarlo.artiano@unina.it,

2 maria.mellone@unina.it,

3 tiziana.pacelli@unina.it

Open Access article distributed under CC BY-NC-ND 4.0
Copyright © Genova University Press



Abstract

Il contributo presenta una sperimentazione didattica condotta nell'ambito del corso di Matematiche Complementari presso il CdL triennale in Matematica dell'Università degli Studi di Napoli Federico II (a.a. 2024/25), volta a promuovere una didattica laboratoriale innovativa e multimodale. Il percorso si è articolato in tre attività laboratoriali: costruzioni geometriche con riga e compasso in macros spazio, microspazio e ambiente digitale; realizzazione e analisi di tracciatori per la generazione di linee rette; esplorazione fenomenologica di trasformazioni proiettive attraverso l'osservazione di ombre. L'approccio adottato, fondato sull'integrazione tra prassi operativa e riflessione teorica, ha perseguito l'obiettivo di incrementare la partecipazione, l'autoefficacia percepita e la motivazione degli studenti, riducendo la procrastinazione accademica. I risultati evidenziano una continuità nella frequenza in presenza del corso per l'a.a. 2024/25, della partecipazione attiva, e un'elevata richiesta di sostenere l'esame nei primi appelli. I dati ottenuti confermano il valore della didattica laboratoriale e multiscalare quale leva per la trasformazione delle pratiche della matematica universitaria e per il rafforzamento dell'apprendimento significativo e condiviso.

Keywords

Laboratorio di Matematica; Matematica universitaria; Formazione del docente universitario; Didattica laboratoriale.

1. Contesto

Il presente lavoro si colloca nell'ampio contesto di ricerca sul Faculty Development. Nel sistema universitario italiano, la relazione tra ricerca, innovazione e pratica didattica presenta ancora alcune distanze (Felisatti, 2011), registrando margini di miglioramento rispetto ad altri Paesi Europei. A tal proposito, lo studio *"Promoting a European*



dimension to teaching enhancement”, condotto dall’*European Forum on Enhanced Collaboration in Teaching* e dall’*European University Association*, si è posto l’obiettivo di censire le iniziative sull’apprendimento e l’insegnamento in Europa, al fine di individuare le diverse azioni intraprese nei vari Paesi europei in riferimento al punto 5 delle *European Standards Guidelines* del 2015 relativamente al miglioramento della qualità della didattica universitaria. Lo studio ha evidenziato chiaramente come, in alcuni Paesi europei - tra cui l’Italia - per lungo tempo siano state assenti strategie nazionali di *Faculty Development* dedicate alla promozione dell’insegnamento e dell’apprendimento, o più in generale allo sviluppo e al miglioramento, della didattica universitaria.

Negli ultimi anni, tuttavia, ci sono state diverse iniziative istituzionali volte a valorizzare le competenze didattiche del docente universitario. Ad esempio, nel 2018, il gruppo di lavoro ANVUR *QuarcDocente* nel documento *“Linee di indirizzo per lo sviluppo professionale del docente e strategie di valutazione della didattica in Università”*, ha evidenziato la necessità di elevare il livello di qualificazione della didattica universitaria. Su questa scia, nel 2023, il *Gruppo di lavoro ANVUR per il riconoscimento e la valorizzazione delle competenze didattiche della docenza universitaria* ha pubblicato le *“Linee Guida per il Riconoscimento e la Valorizzazione della Docenza universitaria* (Felisatti & Perla, 2023) sostenendo il legame profondo tra ricerca, innovazione e prassi didattica:

In campo universitario l’apprendimento deve essere attivo e guidato dalla ricerca (Research-led learning) per sviluppare negli studenti dinamicità, intraprendenza e indipendenza di pensiero, spirito critico e costruttivo, capacità di gestione del nuovo e di affrontare l’incertezza nei contesti personali, professionali e sociali. Le università più accorte considerano gli studenti co-costruttori proattivi e consapevoli della propria esperienza apprenditiva (“producer”) e investono su ambienti di apprendimento autentici, personalizzati, di ricerca (pag. 11).

Seguendo tali indicazioni, molte università italiane hanno cercato di ridurre la distanza rispetto agli altri atenei europei, attraverso progetti mirati alla formazione dei docenti universitari, con l’implementazione di sperimentazioni didattiche e, in alcuni casi attraverso l’attivazione di veri e propri *Teaching and Learning Center*. Anche l’Università degli Studi di Napoli Federico II negli ultimi anni sta sostenendo diverse

iniziative di questo tipo, come ad esempio, il programma di sviluppo F.E.D.E.R.I.C.O (*Formation Experiences Didactic Evaluation Reflexivity Innovation Competences Organization*), svoltosi tra il 2017 e il 2020 (Majello, 2021) ed il progetto di ricerca *La Prospettiva Pedagogica per la Formazione del Docente Universitario (PPFDU)* (Capobianco & Pacelli, 2024), ancora in atto.

Il progetto PPFDU si propone di promuovere anche in ambito universitario una didattica per competenze. Il progetto triennale è una “Iniziativa finanziata nell’ambito del Programma per il Finanziamento della Ricerca di Ateneo (FRA) 2022 dell’Università degli Studi di Napoli Federico II”. In particolare, il progetto mira a:

1. Promuovere un dialogo tra pedagogia, didattica generale e disciplinare, stimolando la riflessione sul ruolo del docente universitario e su come sostenere lo sviluppo delle sue competenze didattiche specifiche;

2. Costituire *Comunità di Pratiche* (Wenger, 2006), anche istituzionali e internazionali, che favoriscano lo scambio su questi temi e la creazione di un modello futuro di Teaching and Learning Center per avviare un’azione strutturata e permanente di supporto alla docenza universitaria;

3. Indirizzare, tramite interventi formativi rivolti ai docenti dell’Ateneo Federiciano, verso una trasformazione da un approccio *Teacher-centred* ad uno *Student-centred learning* (Baldacci, 2013; Gover & Loukkola, 2018), anche con l’obiettivo di ridurre la dispersione e l’abbandono studentesco, ancora prevalenti in alcuni corsi di laurea.

Si evidenzia, dunque, la necessità di promuovere un insegnamento innovativo, attivo e dinamico che possa sostenere e accompagnare la costruzione della conoscenza attraverso attività che prevedano situazioni-problema, sperimentazioni, simulazioni, analisi di casi concreti e metodologie finalizzate a trasformare le aule universitarie in veri laboratori di ricerca-formazione. Come suggerisce Felisatti (2020), l’obiettivo ultimo è rendere autonomi i processi di apprendimento, favorendo l’autoapprendimento e l’autovalutazione. Ne consegue che la didattica deve:

- sviluppare modelli e pratiche di *active learning* (Bishop, Caston, King, 2014), basati su problemi, modalità di scoperta e ricerca rispetto a situazioni autentiche (Kirschner, Sweller, Clark, 2010);

- adottare metodi esperienziali, riflessivi e trasformativi (Schön, 1983,2016; Cranton & Taylor, 2011);
- incorporare tecniche di *assessment for/as learning* (Sambell, McDowell & Montgomery, 2012; Grion & Serbati, 2018).

Le esperienze considerate indicano che il contesto accademico italiano si sta sempre più orientando verso un apprendimento centrato sullo studente. Per rendere efficace questo cambio, i corsi devono mantenere coerenza tra obiettivi, attività didattiche e valutazioni. Secondo Biggs (2003), la qualità dell'apprendimento dipende dall'allineamento tra questi elementi. Un disallineamento crea ciò che Biggs chiama un "curricolo latente": lo studente smette di studiare per imparare e studia solo per superare l'esame, che non è più visto come la fase naturale di un percorso coerente, ma come un ostacolo arbitrario, scollegato dalle attività in aula. Questa incertezza nella valutazione influisce sulla motivazione, come si vede nei dati sulla procrastinazione accademica (Bandura, 1997). Il ritardo nel sostenere gli esami (fenomeno del "fuori corso") non indica solo disorganizzazione, ma rappresenta anche un modo di difendersi da un sistema che non sostiene il senso di autoefficacia, trasformando la sfida accademica in una minaccia per il proprio sé.

Il presente lavoro si inserisce, dunque, nell'ambito del Faculty Development italiano, contribuendo allo sviluppo di attività didattiche disciplinari fondate sui punti precedentemente discussi. In particolare, verrà illustrato un caso di studio, condotto—nell'ambito del progetto PPFDU—mettendo in atto alcune metodologie innovative di didattica, sviluppate nell'a.a. 2024-25 durante il corso a scelta *Matematiche Complementari*, del percorso di Laurea Triennale in Matematica dell'Università degli Studi di Napoli Federico II.

1.1 Le matematiche complementari nel panorama italiano

Il Decreto Ministeriale n. 639 del 2 maggio 2024 ha introdotto i nuovi Gruppi Scientifico-Disciplinari, sostituendo i precedenti settori e macrosettori concorsuali, in ambito universitario. Prima della sua entrata in vigore, le *Matematiche Complementari* erano associate al SSD MAT/04, che comprendeva studi sulla didattica, sulla storia e su ambiti correlati della matematica. Con l'istituzione dei Gruppi Scientifico-Disciplinari (GSD), il decreto ha ricollocato il precedente SSD MAT/04 nel nuovo gruppo *MATH-01/B - Didattica e storia della*



matematica. Tale operazione rappresenta un aggiornamento e un rafforzamento delle connessioni esistenti piuttosto che una rottura: le competenze, i contenuti e le linee di ricerca dell'originario SSD MAT/04 sono ora incorporati nel gruppo MATH-01/B, che eredita la relativa tradizione scientifica, ampliandola con un focus più chiaro sugli aspetti didattici e storico-epistemologici della matematica. Dall'allegato A del decreto-legge si evince che

La ricerca in Didattica della Matematica si caratterizza per lo studio dei processi di apprendimento e insegnamento della matematica a tutti i livelli scolari (dalla scuola pre-primaria all'università, fino all'educazione degli adulti), dei processi di formazione e sviluppo del pensiero e delle idee matematiche a tutte le età, e dei diversi fattori che influenzano, ostacolano o favoriscono tali processi. Comprende la ricerca sulle metodologie didattiche, sui processi di formazione iniziale e continua nelle discipline matematiche degli insegnanti in ingresso e in servizio, sulle valutazioni in matematica e le loro potenzialità formative, sui processi di apprendimento e insegnamento della matematica con l'uso di tecnologie, in diversi contesti, formali e non formali (pag. 3).

Storicamente, i corsi di Matematiche Complementari in Italia hanno costituito il punto di convergenza di aree di ricerca quali la didattica, la storia e i fondamenti della matematica. Attualmente, presso numerose università italiane, tali corsi sono destinati principalmente a studenti interessati agli aspetti fondazionali, storici, epistemologici e didattici della disciplina.

1.2 Il corso di Matematiche Complementari

In questo contesto, il corso di Matematiche Complementari dell'Università degli Studi di Napoli Federico II per l'anno accademico 2024/25, attivato presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" e progettato e condotto dal gruppo di Didattica della Matematica - gli autori del presente contributo - si caratterizza per un approccio in linea con le indicazioni della ricerca della didattica universitaria: è stato, infatti, avviato un primo tentativo di indagine fenomenologica su oggetti matematici quali le costruzioni geometriche e su pratiche come la dimostrazione.

La ricerca si basa sull'approccio del *Laboratorio Matematico*, una metodologia in cui gli studenti, suddivisi in piccoli gruppi, manipolano



artefatti, coinvolgono il corpo nel macrospazio e creano forme nel microspazio (vedi ad esempio Bartolini Bussi, 2008). Il corso di 6 CFU (48 ore), suddiviso in due incontri settimanali, di 2 ore ciascuno, ha previsto tre incontri laboratoriali. Le esperienze di laboratorio sono state progettate e proposte come attività introduttive di uno specifico tema del corso. In particolare, le esperienze hanno riguardato:

- a) le costruzioni geometriche con riga e compasso;
- b) la risoluzione di un problema matematico con i tracciatori di curva;
- c) l'introduzione della geometria proiettiva con esperienze con l'uso di sorgenti di luci e osservazioni di ombre.

Il percorso formativo ha coinvolto tutti gli iscritti al corso: inizialmente sette studenti, diventati poi dieci dopo le prime tre lezioni comprendenti la prima attività laboratoriale. L'esito dell'impatto del corso sulla partecipazione, sul coinvolgimento e sull'atteggiamento degli studenti verrà discusso in seguito.

2. Quadro teorico

La progettazione del corso si riferisce a una cornice teorica che intreccia diversi studi, nazionali ed internazionali, nell'ambito della Mathematics Education: (i) l'idea di *Laboratorio di Matematica*, inteso come ambiente di ricerca didattica in cui si valorizzano problem-solving, manipolazione e discussione argomentata; (ii) il nesso tra *condotta* e *rappresentazione* spaziale: mentre per la prima si intende l'attività sensomotoria direttamente osservabile nell'ambiente (manipolazione, locomozione), la seconda è il processo di ricostruzione dell'esperienza, ovvero l'attività di esplicitazione di tale processo in un sistema simbolico qualsiasi (Bartolini Bussi, 2008); (iii) studi sulla dimostrazione e sugli schemi di prova; (iv) teorie semiotiche dell'apprendimento, con attenzione ai registri e alle conversioni rappresentazionali (Duval, 1995).

In questa ottica, la sperimentazione condotta nell'ambito del corso di Matematiche Complementari, basata sui principi teorici appena citati, indaga sul passaggio dall'esperienza pratica all'attività matematica superiore e viceversa. Tale passaggio richiede un'orchestrazione

didattica mediata da segni/artefatti (ad esempio, nel caso illustrato in questo lavoro, funi, strumenti di disegno, torce e oggetti digitali) per favorire la connessione tra azione e ragionamento spaziale. Prima di presentare la sperimentazione, riportata nel prossimo paragrafo, in questa sezione verranno approfonditi brevemente i quadri teorici della ricerca che hanno guidato il processo di progettazione e implementazione delle attività proposte.

(i) L'idea di *Laboratorio di Matematica* è presentata nei CURRICOLI UMI 2001-2004, che sono stati creati nel quadro del progetto 'Matematica per il cittadino' iniziato nel 2000 dall'Unione Matematica Italiana (U.M.I.) (UMI-CIIM, 2001; UMI, 2003).

Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività (UMI, 2003, pag. 26).

Numerosi studi nel settore della ricerca in didattica della matematica hanno approfondito la pratica laboratoriale. Una prospettiva interessante è quella storico-epistemologica. Dai lavori di Bartolini Bussi et al. (2010) e Giacardi (2011) emerge che il laboratorio matematico, se concepito come spazio di manipolazione di materiali concreti e strumenti dinamici, ha profonde radici storiche. Gli autori illustrano come fin dagli inizi dell'istituzione dell'*International Commission on Mathematical Instruction*, avvenuta nel 1908, e con figure come il matematico Felix Klein, ci fosse un'attenzione a strumenti, modelli concreti e ai legami tra matematica, scienza e tecnologia. Ciò significa che il "laboratorio" non rappresenta solo un'attività accessoria, ma fa parte di una tradizione epistemologica incentrata sulla manipolazione, sulla visualizzazione e sull'esperienza fisica e tecnologica della matematica. È attorno a questa prospettiva, poco esplorata nella

ricerca, insieme a quella socio-costruttivista, che si è sviluppato l'approccio laboratoriale della sperimentazione presentata in questo contributo.

(ii) Il rapporto tra comportamento e rappresentazione spaziale è da tempo al centro di dibattiti pedagogici (ad esempio, Pontecorvo, 1988; Piaget, 1967). Considerando una chiara posizione epistemica sui processi di apprendimento-insegnamento, intesi come dinamiche cognitive complesse, le pratiche spaziali non possono essere ridotte a modelli interpretativi lineari basati su tappe rigide e predeterminate. Pur senza approfondire il dibattito pedagogico, è importante per la ricerca educativa riconoscere la forte correlazione tra la formazione dello schema corporeo e le relazioni spaziali esterne, sviluppando attività che mirano alla formazione e alla costruzione di rapporti tra il corpo e lo spazio circostante. In particolare, nella sperimentazione, le attività didattiche sono state progettate in modo che venisse enfatizzato la connessione tra *macrospazio* e *microspazio*, importante nello sviluppo del ragionamento spaziale e delle capacità rappresentative, anche in età adulta. Sul rapporto tra micro e macrospazio facciamo esplicito riferimento agli studi di Bartolini Bussi:

La percezione attraverso la vista nello spazio macroscopico non è globale, quindi comporta assumere punti di vista diversi, il che richiede l'uso del tempo. I cambiamenti di prospettiva dovuti al movimento sono generalmente lenti, e sia lo spazio che la memoria vengono utilizzati per confrontare queste prospettive. Nel microspazio, spesso abbiamo la possibilità di vedere da una prospettiva relativamente globale da uno o pochi punti di vista. Di conseguenza, la percezione è immediata e, nel breve periodo, si verificano spostamenti significativi di prospettiva (Bartolini Bussi, 2008, p. 67).

(iii) La dimostrazione deduttiva gioca un ruolo fondamentale nell'apprendimento della geometria e il suo insegnamento oggi si arricchisce di nuove prospettive. In passato, la geometria era vista principalmente come contesto per insegnare la deduzione, privilegiando il risultato formale finale rispetto al processo di ragionamento e spesso trascurando sia l'aspetto visivo sia il coinvolgimento attivo dello studente. Oggi, invece, si promuovono ambienti di apprendimento innovativi –come le attività laboratoriali– che, pur mantenendo la deduzione come elemento centrale, cercano di coinvolgere

maggiormente gli studenti, aiutandoli a percepire l'esigenza di spiegazioni logiche e ad apprezzare la forza della giustificazione deduttiva come strumento esplicativo. Lo strumento didattico della dimostrazione va, quindi, inteso in senso multifunzionale: non serve solo a *verificare* l'attendibilità di un'affermazione, assicurando che ogni risultato si basi su ragionamenti solidi. Oltre alla verifica, la dimostrazione offre anche un ruolo *esplicativo*, aiutando a comprendere a fondo perché un enunciato sia vero e mettendo in luce le connessioni tra le idee matematiche coinvolte. Un altro elemento chiave è la *sistematizzazione* del sapere: attraverso la dimostrazione, vari risultati vengono organizzati in un sistema coerente, fondato su assiomi, concetti fondamentali e teoremi. Inoltre, la dimostrazione è uno strumento di *scoperta*, poiché il suo utilizzo può portare all'individuazione o all'invenzione di nuovi risultati matematici. Infine, svolge una funzione *comunicativa*, facilitando la condivisione del sapere e il confronto tra le persone (de Villiers, 1990; Mariotti, 2022).

(iv) La matematica è, per eccellenza, una disciplina semiotica, e non è un caso che il fondatore della semiotica moderna, Charles Sanders Peirce, fosse un matematico. In effetti, molti matematici sono dei semiotici: fanno semiotica senza rendersene conto. La dimensione semiotica della matematica è ampiamente attenzionata come dimostrano numerosi studi in Italia e all'estero (Arzarelo, 2009; Duval, 2006; Radford, 2021). Questa disciplina non si occupa di segni fissi, determinati a priori e identici per tutti. In termini generali, i segni di un testo matematico non sono riducibili a simboli usati solo secondo alcune regole logiche, indipendentemente dal loro significato (*aspetto sintattico*), ma sono anche dei segmenti dotati di significato (*aspetto semantico*). A tal proposito, Radford (2021) sostiene che gli oggetti di conoscenza contengono contraddizioni che riflettono diverse prospettive culturali e relazioni di potere sociali, e rimangono aperti al cambiamento attraverso la pratica. Ciò suggerisce che l'emergere di un dialogo matematico sia possibile in tutti i contesti socio-culturali, progettando iniziative accurate che includano mediatori in sintonia con le esigenze specifiche di ogni contesto. Nella prossima sezione, presenteremo in modo dettagliato la sperimentazione, illustrando le metodologie adottate, gli obiettivi raggiunti e le eventuali implicazioni future, offrendo così una panoramica completa e approfondita dell'intero processo.

3. La sperimentazione

3.1 Disegno metodologico e domanda di ricerca

La sperimentazione, illustrata in questo contributo, si fonda su un *approccio qualitativo* integrato da elementi di *design-based research* (Cobb et al., 2003) ed è stata concepita sulla premessa che attività laboratoriali—mirate e strategicamente pianificate per introdurre specifici argomenti—possano incrementare l'interesse e la partecipazione degli studenti universitari, impattando positivamente sull'autoefficacia percepita e riducendo i tempi di procrastinazione accademica.

Nel contesto del corso di Matematiche Complementari svolto nel secondo semestre presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II è stata svolta un'attività concreta che ha visto il docente del corso impegnato nel ruolo di facilitatore della costruzione di ambienti di apprendimento attivi. Durante questa esperienza, il docente ha creato un ambiente volto a favorire la generazione di pensiero critico e la negoziazione di significati, stimolando la partecipazione attiva degli studenti. Gli studenti sono stati invitati a impegnarsi direttamente nella risoluzione di problemi, scegliendo in modo autonomo le strategie risolutive, collaborando nella ricerca e nella validazione delle soluzioni proposte. L'attività è stata progettata adottando come approccio principale quello percettivo-motorio —a contrasto con la prassi didattica tradizionale, ancora molto diffusa nei corsi di matematica in ambito universitario— privilegiando il coinvolgimento corporeo, la manipolazione di strumenti concreti e il ricorso costante a esperienze sensoriali e percettive distribuite nel tempo.

Un aspetto peculiare dell'esperienza è stato l'utilizzo di oggetti e materiali (corde, torce, aste forate e strumenti di disegno) come mediatori nel processo di apprendimento. Inoltre, si è focalizzato molto sulle interazioni sociali —in particolare le discussioni collettive sulle strategie adottate e sui risultati ottenuti— per supportare lo sviluppo delle conoscenze matematiche. Per rendere le attività sfidanti ma accessibili, i compiti sono stati calibrati presentando problemi a soglia di difficoltà bassa che, inizialmente, consentissero la partecipazione di tutti e offrissero la possibilità di elaborare soluzioni multiple e creative;

d'altra parte, però le attività erano arricchite da livelli di complessità crescente.

Le attività si sono svolte in piccoli gruppi (2-3 studenti) e tutti gli incontri hanno avuto luogo in aule dotate di banchi e sedie fisse. Nonostante la configurazione statica della classe, la lezione è stata trasformata in un laboratorio dinamico: momenti in aula si sono alternati con momenti in spazi esterni, lavori di gruppo e attività svolte in piedi, favorendo così un coinvolgimento attivo e diretto degli studenti.

La raccolta dei dati si è avvalsa di fotografie, videoregistrazioni, raccolta di attività tramite software, note d'osservazione e trascrizioni di discussioni plenarie. Le tre sessioni laboratoriali, ognuna di due ore, hanno permesso la comparabilità dei risultati e l'analisi sugli schemi di prova e sulle attività semiotiche (azioni, gesti, discorsi verbali, rappresentazioni grafiche e digitali, proprietà invocate, uso di definizioni e teoremi, controlli ipotetici).

In questo contributo, poiché i risultati analitici dei dati raccolti sono ancora in fase iniziale, ci si concentrerà su un'analisi retrospettiva che riguarda la partecipazione e gli effetti del corso sulla carriera degli studenti. Questi aspetti forniscono una risposta più puntuale alla domanda di ricerca che ha guidato l'intera sperimentazione:

in che misura un corso universitario di matematica, che integra lezioni frontali partecipate con attività laboratoriali opportunamente progettate influisce sull'autoefficacia percepita degli studenti e sulla procrastinazione accademica?

3.2 Il percorso didattico e le attività laboratoriali

Nel corso dell'anno accademico 2024/25, nell'ambito del corso di Laurea Triennale di Matematica dell'Università degli Studi di Napoli Federico II, il corso a scelta di *Matematiche Complementari* è stato disegnato per proporre un percorso storico ed epistemologico con rivisitazioni didattiche dell'evoluzione del pensiero geometrico, partendo dai problemi classici dell'antichità per giungere alla moderna concezione assiomatica. Sinteticamente, il programma si articola attraverso tre tappe fondamentali:

1. Il cuore pulsante della prima parte del corso è l'analisi critica delle costruzioni con riga e compasso. Partendo dagli Elementi di Euclide si

analizzano criticamente le costruzioni con riga e compasso. Il corso mostra come la traduzione nel linguaggio algebrico ponga un limite alle possibili costruzioni realizzabili.

2. Nella parte centrale del corso, superando la staticità del disegno su carta, il corso introduce la dimensione cinematica della geometria attraverso lo studio degli strumenti meccanici. Vengono analizzati i dispositivi articolati e le macchine matematiche che incarnano trasformazioni geometriche complesse e che permettono di risolvere problemi classici irrisolvibili con riga e compasso.

3. La parte finale del corso segna il passaggio cruciale dalla geometria "della misura" (euclidea) alla geometria "della posizione" (proiettiva). Attraverso l'introduzione dei punti all'infinito e delle coordinate omogenee, si abbandona l'intuizione metrica per abbracciare gli invarianti proiettivi, come il birapporto. Infine, l'analisi critica del V postulato e l'approccio assiomatico di Hilbert aprono le porte agli spazi non euclidei, esplorando modelli alternativi come la geometria iperbolica (modello di Poincaré) e quella ellittica, discutendo la sistematizzazione matematica delle geometrie nel programma di Erlangen presentato da Felix Klein.

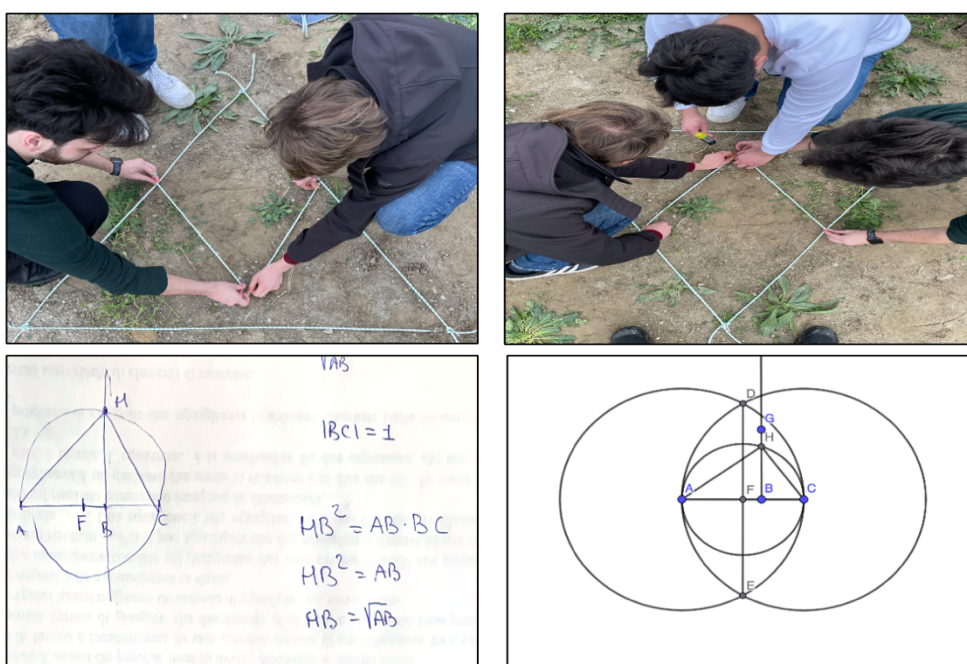
All'interno di questo percorso sono state progettate tre attività laboratoriali, ciascuna a introduzione dei tre blocchi illustrati precedentemente: 1) *Costruzioni geometriche e algebra dei numeri costruibili con riga e compasso*; 2) *Realizzazione di un sistema articolato per tracciare una linea retta*; 3) *Fenomenologie delle trasformazioni proiettive*.

Le esperienze laboratoriali si sono svolte sia nell'aula universitaria, trasformandola in un laboratorio, sia negli spazi all'aperto limitrofi all'aula. Una seconda caratteristica riguarda il materiale utilizzato: per tutte le esperienze è stato proposto l'uso di materiale povero, cioè oggetti e dispositivi di facile reperibilità, basso costo e non specialistico. Infine, tutte le attività sono state progettate e realizzate proponendo la risoluzione di problemi matematici di carattere storico-epistemologico. Dal punto di vista pedagogico la consegna dei problemi si basa sui seguenti principi: - una bassa soglia d'ingresso per consentire a tutti di partecipare; - una struttura aperta che consenta di esplorare liberamente e di implementare diverse strategie di risoluzione. I laboratori sono stati organizzati suddividendo la classe in

piccoli gruppi di studenti, prevedendo una fase finale di restituzione dell'esperienza svolta.

- *Costruzioni geometriche e algebra dei numeri costruibili con riga e compasso*

L'attività prevede la costruzione di alcune proposizioni paradigmatiche presenti negli Elementi di Euclide, attraverso tre ambienti diversi: *macrospazio*, *microspazio* e *spazio digitale*. Particolarmente significativa è la proposizione 8 del libro VI, che permette di costruire un segmento con lunghezza uguale alla radice quadrata di un segmento dato, partendo da un segmento iniziale. Inizialmente, gli studenti sono stati incoraggiati a interpretare il ruolo di “arpedonapti”, gli antichi esperti egizi che ridefinivano i confini delle



proprietà usando funi tese e vincolate al terreno dopo le inondazioni del Nilo. Con l'uso di una corda e di picchetti, e seguendo le regole di costruzione euclidea con riga e compasso, hanno lavorato all'aperto (macrospazio) alla realizzazione della costruzione. Successivamente, è stato chiesto loro di tradurre la costruzione sia su carta (microspazio), usando strumenti come riga e compasso, sia sul software di geometria dinamica (spazio digitale). La Figura 1 mostra quattro immagini esemplificative dell'attività di laboratorio.

Figura 1 - Sequenza di immagini rappresentative della prima attività laboratoriale. In alto due foto mostrano gli studenti impegnati nell'attività degli arpedonapti. In basso due rappresentazioni, una su carta e l'altra con GeoGebra, della costruzione della proposizione 8 del libro VI degli Elementi di Euclide.

La progettazione dei tre momenti nei tre diversi ambienti apre a una riflessione sull'importanza del sistema di rappresentazione semiotica degli oggetti matematici riprodotti e, in particolare, all'attivazione di dinamiche cognitive risonanti con la multimodalità sociosemiotica e con i concetti di conversione e trattamento di Duval (2006). Nel grande spazio all'aperto, gli oggetti costruiti (ad esempio, linee e circonferenze) sono mediati dalla tensione della fune, dal suo movimento innescato attraverso il corpo degli studenti. L'attività richiede, quindi, un'intrinseca collaborazione tra gli studenti sia dal punto di vista fisico sia da quello comunicativo-relazionale. Sul microspazio del foglio, si sviluppano le capacità oculomane e la coordinazione motoria attraverso gesti nell'uso di strumenti di disegno, come compasso e riga. La mano che guida gli strumenti svolge un ruolo fondamentale nella rappresentazione grafica, fungendo da interfaccia che collega gli stati interni (pensieri e ragionamenti) agli stati esterni, come il linguaggio e il movimento (Arcà & Guidoni, 1987). Nel terzo ambiente, quello digitale, predominano il ragionamento algoritmico e le regole imposte dal software. Nel complesso, questa attività permette di collegare il movimento corporeo nel macrospace e quello preciso della mano nel microspazio, azioni che legano il ragionamento spaziale al pensiero algoritmico e computazionale.

La diversificazione degli ambienti — macrospace, microspazio e spazio digitale — è stata pensata per impattare sui processi dimostrativi e argomentativi messi in atto dagli studenti. Nel macrospace, l'azione corporea collettiva e la manipolazione fisica degli strumenti hanno lo scopo di favorire la nascita spontanea di argomentazioni legate all'esperienza e all'immediatezza: gli studenti hanno sentito il bisogno di giustificare le proprie scelte operative e di confrontare le soluzioni prodotte direttamente, trasformando ogni passo della costruzione in esplicitazione ragionata di vincoli e proprietà geometriche. Qui il discorso argomentativo è spesso mediato dal dialogo, dal linguaggio deittico (“qui, lì”) e dalle metafore corporee, favorendo una negoziazione condivisa dei significati e delle strategie.

Nel passaggio al microspazio del foglio, la necessità di rappresentare con precisione le costruzioni e di tradurre i gesti in configurazioni grafiche stimola l'emergere di argomentazioni più formalizzate e appartenenti al registro grafico-simbolico. Gli studenti sono spinti a esplicitare le relazioni tra gli oggetti attraverso definizioni tecniche, proprietà e teoremi, spesso motivando ogni passaggio in modo sequenziale e basato su controlli visivi più rigorosi. Questo contesto agevola un avvicinamento progressivo alla formalizzazione del discorso dimostrativo tradizionale, richiedendo chiarezza nella sequenza dei passaggi e nell'uso della terminologia specifica.

Nell'ambiente digitale, infine, la costruzione guidata da software rende espliciti i vincoli e le dipendenze tra gli oggetti geometrici, stimolando negli studenti un approccio algoritmico e sistematico alla prova. La rigidità delle regole digitali porta a un affinamento dell'argomentazione – qui la dimostrazione è spesso fondata su proprietà implementate dal software, e il controllo delle invarianze può essere immediatamente verificato attraverso strumenti automatici. Questo ambiente favorisce una riflessione metacognitiva sulle condizioni di validità della costruzione e sulla distinzione tra uguaglianza empirica e uguaglianza formale.

In sintesi, lavorare in diversi ambienti ha attivato una pluralità di processi dimostrativi e argomentativi: dall'esplicitazione dialogica e corporea, all'argomentazione grafica e tecnica, fino al controllo algoritmico e sistematico della dimostrazione. Questa multiscalarità permette agli studenti di percepire la dimostrazione non come passaggio obbligato, ma come pratica viva, adattabile e radicata tanto nel fare quanto nel pensare matematico.

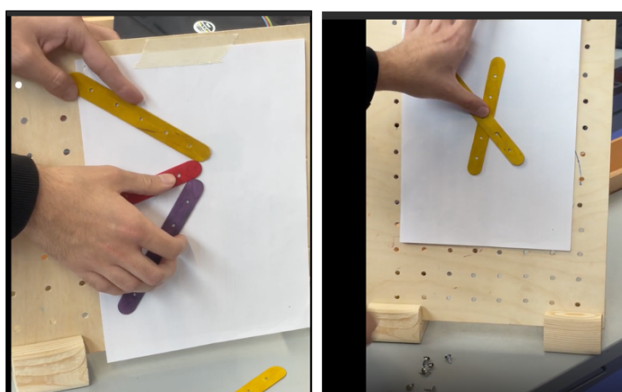
- La costruzione di tracciatori di curva per risolvere il problema di disegnare una linea retta

Questa attività sperimentale ha lo scopo di introdurre il rapporto tra trasformazioni geometriche, costruzioni e utilizzo di macchine matematiche e concetti teorici, nell'ambito del secondo blocco tematico del corso di Matematiche Complementari. L'attività si focalizza sulla costruzione, dal punto di vista ingegneristico, di un meccanismo articolato capace di tracciare linee dritte durante il

movimento. Il materiale fornito ai gruppi di studenti è costituito da aste in legno forate, geopiani, fermacampioni e fogli.

Nella fase iniziale dell'attività gli studenti hanno liberamente esplorato gli strumenti messi a disposizione senza l'intenzione di risolvere il problema, ma concentrandosi più sugli aspetti manipolativi. Successivamente, in maniera collaborativa, hanno attivato un processo di montaggio assemblando i diversi oggetti verso prime forme di meccanismi.

Sono, quindi, stati condotti diversi tentativi, supportati dall'uso di un foglio e di un pennarello, per verificare la traccia del percorso compiuto. Significativa è stata l'osservazione di un gruppo che ha prontamente evidenziato come il meccanismo da loro individuato non è in grado di generare un segmento rettilineo continuo, ma descrive una curva nota come "lemniscata", ovvero una curva di lunga inflessione a forma di infinito la quale presenta solo una porzione in cui il tracciato è retto. Uno degli studenti afferma, infatti, che la curva *"solo all'inizio va dritta"*, evidenziando la cinematica della rappresentazione grafica e



comprendendo da subito che la soluzione del problema proposto fosse stata trovata in modo approssimativo. Tale curva si ottiene fissando due aste di stessa lunghezza al telaio e collegandole con una più corta: il movimento del punto medio di quest'ultima

traccia la lemniscata.

Al termine della lezione, sono state presentate agli studenti delle animazioni che illustrano i meccanismi storici legati ai tentativi di tracciare una linea dritta. In Figura 2 e Figura 3 si riporta una sequenza temporale dell'attività laboratoriale.

Figura 2 - Primi momenti esplorativi degli artefatti.

Analizzando l'attività, sembra almeno da una prima osservazione sul campo, che i loro tentativi di creare il meccanismo seguano più o meno l'evoluzione storica del problema, permettendo di inserire l'attività matematica in un contesto autentico e complesso, che collega agli aspetti fondazionali e storici quelli ingegneristici e tecnologici.



Figura 3 - Gli studenti implementano un meccanismo articolato.

Questa attività laboratoriale ha, quindi, permesso agli studenti di indagare da una prospettiva storica, epistemologica, fondazionale e didattica la costruzione di autentici tracciatori di curve, mettendo in evidenza come tali strumenti in contesti di apprendimento-insegnamento della matematica riescano a coniugare in modo organico gli aspetti formali con quelli laboratoriali. L'attività è stata pensata mettendo al centro lo studente nella fase dell'esplorazione, della progettazione e della realizzazione del manufatto, facendo sì che gli aspetti argomentativi e dimostrativi emergessero riflettendo sul ruolo degli strumenti e dal dialogo intrapersonale.



- Figura 4 - In questa sequenza di immagini gli studenti osservano le ombre e le coniche ottenute con un fascio di luce generato da una torcia.

- *Fenomenologie delle trasformazioni proiettive*

Come presentazione del terzo blocco del corso, si è scelto di progettare un'attività laboratoriale basata sull'esplorazione fenomenologica delle trasformazioni proiettive. In primo luogo, i gruppi hanno osservato il formarsi di zone di ombra prodotte usando una torcia e un telaio di legno con fori equispaziati (ad es. il geopiano). È stato chiesto loro di esporre il telaio forato alla luce di una torcia e osservare l'ombra prodotta raccolta sul piano perpendicolare al telaio variando la posizione della torcia rispetto al telaio, nell'aula in penombra (Figura 4). Successivamente, la stessa esperienza è stata proposta alla luce del Sole e l'ombra prodotta è stata osservata raccolta sul piano perpendicolare al telaio (Figura 5).



Figura 5 - Le immagini raffigurano gli studenti impegnati nell'esplorazione della formazione delle ombre alla luce del sole.

Queste fasi esplorative sono state utili per introdurre il concetto di sorgente puntiforme e sorgente estesa. Durante la generazione delle ombre, è stato richiesto di descrivere le strutture geometriche invarianti tra l'oggetto e la sua proiezione. Successivamente, la torcia è stata usata per generare le sezioni coniche. Gli studenti hanno rivolto il fascio di luce verso il muro e, partendo dalla posizione in cui il raggio centrico è perpendicolare al muro, hanno inclinato la torcia fino a quando non ha raggiunto la posizione parallela al muro.

Non si entra qui nel dettaglio della matematica che è possibile esplorare con questo tipo di attività. Si vuole, piuttosto, evidenziare la possibilità di introdurre concetti di matematica superiore in un contesto accademico attraverso attività didattiche ben progettate che mirano all'unificazione dei concetti. Ma non solo. Lo scopo è anche quello di avvicinare la matematica alla realtà concreta mettendo al centro lo studente e il suo modo di esplorazione fenomenologica, collegando l'osservazione di fenomeni naturali alle teorie matematiche. Molte volte, infatti, le matematiche superiori sono più vicine al concreto e quindi più vive delle matematiche elementari, le quali, troppo spesso stilizzate nei loro elementi semplici, appaiono fredde e lontane dalla complessa realtà del mondo che ci circonda (Castelnuovo, 2017).

Questo distaccamento tra realtà e matematica ha inizio, purtroppo, dalla scuola primaria e si concretizza durante gli studi universitari. Il compito consiste nel riaccendere progressivamente l'interesse degli studenti universitari verso una matematica che spesso appare disincarnata, fatta di astrazioni lontane dalla loro origine concreta. Le attività ideate per questa sperimentazione mirano proprio a cambiare questa percezione, mettendo in evidenza come il percorso dal fenomeno alla teoria e viceversa possa rendere i concetti più significativi, stimolando curiosità, partecipazione e la capacità di collegare le idee matematiche alle esperienze quotidiane. In questo modo, la matematica universitaria riscopre il suo forte legame con l'esperienza concreta e promuove un apprendimento più attivo e trasformativo.

4. Risultati

In questa sezione presentiamo i risultati semi-qualitativi ottenuti in seguito allo svolgimento del corso, focalizzandoci su presenza, partecipazione e impatti immediati sulla carriera degli studenti coinvolti.

I dati evidenziano un aumento sia della presenza sia della costanza nella partecipazione: il numero degli studenti è passato da 7 a 10 nel corso delle lezioni e tutte le attività hanno registrato un'alta partecipazione, sebbene il campione fosse limitato. Da sottolineare che il corso è stato attivato solo in un secondo momento, quando molti studenti del corso di studi triennale avevano già ormai selezionato i corsi a scelta da seguire.

Al termine del corso, tutti gli studenti hanno sostenuto l'esame orale previsto entro quattro mesi dalla conclusione, riportando valutazioni mediamente alte. L'esito positivo può essere interpretato attraverso il modello dell'*Allineamento Costruttivo* (Biggs, 2003): la coerenza tra i contenuti didattici e le modalità di valutazione ha ridotto eventuali ambiguità, consentendo agli studenti di esprimere al meglio le proprie competenze. Inoltre, la rapidità nell'affrontare l'esame rappresenta un indicatore di elevata autoefficacia percepita (Bandura, 1997). Il corso sembra aver favorito la consapevolezza delle proprie competenze (Mastery Experience) che si è evinta dalla sicurezza con cui gli studenti hanno argomentato durante le sessioni di esame, contribuendo a ridurre la procrastinazione accademica.

Due studenti hanno inoltre approfondito argomenti trattati durante il corso nei loro lavori di tesi di laurea in Didattica della Matematica (su temi riguardanti le macchine matematiche e il V postulato e geometrie non euclidee), a conferma della positività dei risultati anche in termini di ricadute motivazionali e formative.

Sebbene il numero di studenti coinvolti sia ridotto, i dati sembrano indicare che la sperimentazione abbia funzionato positivamente. Per le prossime edizioni prevediamo di rafforzare ulteriormente l'integrazione tra attività laboratoriale e lezioni frontali attive, nonché di sviluppare modalità di valutazione più coerenti, come l'introduzione di portfoli.

Conclusioni

L'attività di sperimentazione riportata in questo articolo vuole essere un contributo per riflettere sulle buone pratiche da introdurre nella didattica accademica italiana. Seppur in maniera parziale, dai primi risultati emersi, si evidenzia che l'integrazione sistematica del laboratorio nei corsi universitari di matematica può indurre a un sostanziale riposizionamento del modo in cui la disciplina viene percepita, ridefinendola non più come un semplice corpus di risultati astratti, ma come una pratica viva di indagine, costruzione e negoziazione di significati (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Brousseau, 1997). Le tre attività laboratoriali presentate hanno attivato una gamma estesa di processi cognitivi, riflessivi e relazionali sia a livello individuale che di gruppo.

I risultati ottenuti confermano quanto rilevato nella letteratura internazionale e nazionale: la didattica laboratoriale e multimodale incrementa l'impegno attivo dello studente, favorisce autoefficacia percepita, riduce la procrastinazione accademica (Bandura, 1997; Biggs, 2003; Felisatti & Perla, 2023). La costanza nella partecipazione e la tempestività nel sostenere gli esami, così come gli approfondimenti tematici nelle tesi degli studenti, testimoniano l'impatto positivo del modello implementato. Questi dati suggeriscono che un approccio che integra pratiche esperienziali ed ambienti multiscolari possa favorire la sedimentazione profonda delle competenze, oltre all'emergere di curiosità epistemologica e senso critico.

Le esperienze laboratoriali hanno rafforzato la coesione e la collaborazione tra gli studenti, stimolando dinamiche di peer learning e un senso di responsabilità condivisa sia rispetto all'apprendimento che al processo di costruzione del sapere (Wenger, 2006). In prospettiva, l'attivazione di routine documentative - come diari di bordo - può inoltre promuovere la riflessione metacognitiva e facilitare l'accountability didattica (Schon, 1983; Grion & Serbati, 2018), sostenendo il docente nella valutazione sistematica dell'impatto delle attività.

Un ulteriore aspetto significativo, ben documentato dalla Castelnovo (1963/2017), riguarda la capacità delle attività laboratoriali di facilitare il passaggio dal concreto all'astratto, rendendo la matematica un'esperienza incarnata, multisensoriale e profondamente ancorata alla realtà. La concretezza degli artefatti e delle esperienze,

adeguatamente orchestrate sul piano didattico, si traduce in una maggiore comprensione e appropriazione dei concetti matematici complessi. In questa prospettiva, Castelnuovo (2017) sottolinea come materiali operativi, mobili e trasformabili rappresentino punti di partenza validi per il pensiero astratto e riflettano la struttura stessa della matematica come disciplina delle relazioni.

Inoltre, l'esperienza suggerisce che una riflessione teorica e pratica su come cambia la progettualità dell'insegnante attraverso l'uso di strumenti digitali e laboratoriali sia oggi imprescindibile (Capobianco & Pacelli, 2024). La trasformatività così intesa può manifestarsi sia nell'adattamento degli strumenti ai modelli operativi del docente, sia nella possibilità che tali strumenti inducano un'evoluzione dei modelli stessi. Rimane inoltre da approfondire quanto gli artefatti prodotti in aula possano divenire punti di riferimento sia per l'attivazione degli studenti che per l'interazione e il feedback disciplinare, in linea con la riflessione di Bartolini Bussi (2008) e Duval (1995) sui registri di rappresentazione e la mediazione semiotica.

L'approccio laboratoriale si conferma, quindi, una leva fondamentale per la disseminazione e trasformazione delle pratiche didattiche, favorendo sia la valorizzazione della prassi individuale che l'evoluzione condivisa della comunità docente (ANVUR, 2018; Felisatti & Perla, 2023). In questo quadro, il ripensamento delle pratiche valutative, come l'introduzione di portfolio, acquista centralità per garantire coerenza tra obiettivi di apprendimento, attività e criteri valutativi (Biggs, 2003; Sambell, McDowell & Montgomery, 2012).

L'implementazione di una didattica prevalentemente laboratoriale in richiede, tuttavia, di affrontare alcune sfide metodologiche ed organizzative. In particolare, nel caso in cui, le future edizioni del corso coinvolgano un numero maggiore di studenti, si avrà l'occasione per estendere la sperimentazione su un campione più ampio in modo da approfondire l'analisi qualitativa dei processi di apprendimento e integrare indicatori più sistematici relativi all'autoefficacia, alla partecipazione e agli esiti formativi.

Inoltre sarà necessario ripensare la gestione degli spazi e dei tempi, predisporre materiali e artefatti in numero adeguato e valutare eventualmente la presenza di tutor che possano facilitare il lavoro dei gruppi e la documentazione delle esperienze. Tali aspetti rappresentano condizioni essenziali per preservare la qualità delle interazioni, della

discussione matematica e della mediazione didattica che caratterizzano l'approccio laboratoriale.

In conclusione, i risultati ottenuti incoraggiano a proseguire la ricerca attraverso studi longitudinali, diversificando ulteriormente ambienti e routine didattiche. La collaborazione tra docenti, studenti e figure di supporto potrà contribuire a consolidare un modello di didattica laboratoriale sostenibile offrendo nuove chiavi interpretative per comprendere la dimensione trasformativa della didattica laboratoriale. Così, la matematica universitaria riafferma il suo potenziale come terreno vivo di crescita personale, professionale ed etico.



Riferimenti bibliografici

ANVUR (2018). *Quarcdocente. Linee di indirizzo per lo sviluppo professionale del docente e strategie di valutazione della didattica in Università*. ANVUR

Arcà, Maria, Paolo Guidoni. 1987. *Guardare per sistemi, guardare per variabili*. Modena: AIF Editore.

Baldacci, Massimo, a cura di. 2013. *La formazione dei docenti in Europa*. Milano: Bruno Mondadori.

Bandura, Albert. 1997. *Self-efficacy: The exercise of control*. New York: Macmillan.

Bartolini Bussi, Maria Giuseppina. 2008. *Matematica: i numeri e lo spazio*. Bergamo:Edizioni Junior.

Bartolini Bussi, Maria Giuseppina, Maria Alessandra Mariotti. 2008. Semiotic mediation in the mathematics classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education*, a cura di Lyn D. English, 2nd ed., 746-783. New York: Routledge.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer.

Bartolini Bussi, Maria Giuseppina, Daina Taimina, Masami Isoda. 2010. Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM*, vol. 42, n. 1, 19-31.

Biggs, John. 2003. *Aligning teaching for constructing learning*. York: Higher Education Academ.

Bishop, Catharine F., Michael I. Caston, Cheryl A. King. 2014. Learner-centered environments: Creating effective strategies based on student attitudes and faculty reflection. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning*, vol. 14, n. 3, 46-63.

Brousseau, Guy. 1997. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.



- Capobianco, Rosaria, Pacelli, Tiziana. 2024. Per la promozione della didattica per competenze all'università: il progetto di ricerca PPFDU dell'ateneo federiciano. In Arianna Marci (a cura di). *Volume collettaneo degli Atti del 5° Convegno Nazionale sul Faculty Development. Dalle politiche alle pratiche. La professionalità docente nell'evoluzione istituzionale e tecnologica*, pp. 351-375. Collana Educare. Genoa University Press (GUP).
- Castelnuovo, Emma. 2017. *Didattica della matematica*. A cura di Ferdinando Arzarello, Maria Giuseppina Bartolini Bussi. Torino: UTET Università.
- Cranton, Patricia, Edward W. Taylor. 2011. Transformative learning. In *The Routledge international handbook of learning*, 214-223. London: Routledge.
- Cobb, Paul, Jere Confrey, Andrea diSessa, Richard Lehrer, Leona Schauble. 2003. Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, vol. 32, n. 1, 9-13.
- De Villiers, Michael. 1990. The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, n. 24, 17-24.
- Duval, Raymond. 1995. *Semiosi e pensiero umano. Registri semiotici e apprendimenti intellettuali*. Bern: Peter Lang.
- Duval, Raymond. 2006. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61, n. 1, 103-131.
- Felisatti, Ettore. 2011. Didattica universitaria e innovazione. In *Il docente universitario. Una professione tra ricerca, didattica e governance degli Atenei*, vol. 1, 137-144. Lecce: Pensa MultiMedia.
- Felisatti, Ettore, Perla, Loredana. 2023. Documento Linee Guida riconoscimento e valorizzazione docenza universitaria. ANVUR <https://www.anvur.it/gruppo-di-lavoro-ric/gruppo-di-lavoro-riconoscimento-e-valorizzazione-delle-competenze-didattiche-della-docenza-universitaria/>

- Giacardi, Livia. 2011. L'emergere dell'idea di Laboratorio di matematica agli inizi del Novecento. In Atti del convegno *DI.FI.MA. 2011*. Torino: Università degli Studi di Torino.
- Gover, Anna, Tiia Loukkola. 2018. *Enhancing quality: From policy to practice*. Bruxelles: European University Association.
- Grion, Valentina, Anna Serbati, David Nicol. 2018. *Technology as a support to traditional assessment practices*, vol. 26, n. 3, 3-5.
- Majello, Barbara. 2021. Formazione e sperimentazione didattica per il miglioramento e l'innovazione dei processi di insegnamento del docente Universitario quale motore di sviluppo delle competenze del docente. In Atti del convegno *Faculty Development: la via italiana* - 28 e 29 ottobre 2021. Genova: Università degli Studi di Genova e ASDUNI.
- Mariotti, Maria Alessandra. 2022. *Argomentare e dimostrare come problema didattico*. Torino: UTET Università.
- Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, Unione Matematica Italiana, & Società Italiana di Statistica. 2003. Matematica 2003: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Abilità e conoscenze matematiche per la Scuola Secondaria di secondo grado. <https://www.matematica.it/tomasi/lab-did/pdf/matem-2003-curricolo.pdf>
- Piaget, Jean. 1967. *Lo sviluppo mentale del bambino*. Torino: Einaudi.
- Pontecorvo, Clotilde. 1988. I bambini parlano per fare scienza: la formazione del linguaggio scientifico nella discussione in classe. In *L'educazione linguistica e i linguaggi delle scienze*, a cura di Anna Rosa Guerriero, 85-109. Firenze: La Nuova Italia.
- Radford, Luis. 2021. *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Vol. 4. Leiden: Brill.



- Sambell, Kay, Liz McDowell, Catherine Montgomery. 2012. *Assessment for learning in higher education*. London: Routledge.
- Schön, Donald. 1983. *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action*. London: Temple Smith.
- Schön, Donald. 2016. *Formare il professionista riflessivo. Per una nuova prospettiva della formazione e dell'apprendimento nelle professioni*. A cura di Maura Striano. Milano: FrancoAngeli.
- Sweller, John, Richard Clark, Paul Kirschner. 2010. Teaching general problem-solving skills is not a substitute for, or a viable addition to, teaching mathematics. *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 57, n. 10, 1303-1304.
- UMI-CIIM. 2001. *Matematica 2001: Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media)*. In *Atti del XXII Convegno UMI-CIIM* (Ischia, 15-17 novembre 2001). Unione Matematica Italiana.
- Wenger, Etienne. 2006. *Comunità di pratica. Apprendimento, significato e identità*. Raffaello Cortina Editore.

