

FIBONACCI E PACIOLI, PRECURSORI DELLA TERZA MISSIONE

M.R. Celentani, M.R. Posteraro, G. Terzo



Leonardo Pisano e Fra' Luca Pacioli

Nell'ambito della III Missione in Matematica è importante dedicare uno spazio a chi la III Missione l'ha vissuta in prima persona, nel XII e nel XV secolo, svolgendo un ruolo fondamentale nella storia e nello sviluppo della matematica moderna, creando ponti tra culture diverse, spinti dal desiderio di divulgare e rendere più accessibile la matematica. Stiamo parlando proprio di loro, Leonardo Fibonacci e Luca Pacioli, precursori della III Missione, pietre miliari nella storia della Matematica.

Può sembrare strano mettere in relazione due personaggi vissuti a tre secoli di distanza, ma i collegamenti sono tanti e Pacioli ha raccolto e sviluppato, con spirito simile, l'importante eredità di Fibonacci. **Fibonacci** fu il **pioniere della matematica moderna** in Europa; **Luca Pacioli** fu il suo erede rinascimentale, rese sistematico, accessibile e "umanistico" quel sapere. Entrambi contribuirono a un'unica grande missione: **portare la matematica nel cuore della cultura e della vita quotidiana.**

Le riflessioni che seguono nascono dagli incontri a loro dedicati nell'ambito del Fibonacci Day alla Federico II. Fibonacci e Pacioli offrono infatti un'inesauribile fonte di spunti per molteplici "approcci matematici", sia con studenti sia con un pubblico più ampio: è nella loro stessa natura, poiché entrambi hanno fatto della comunicazione matematica una vera e propria arte. Indovinelli, giochi, applicazioni artistiche e pratiche, osservazione della natura: qualunque sia il livello a cui si desidera lavorare, questi due protagonisti della storia della matematica permettono di proporre attività coinvolgenti e adatte a suscitare curiosità e interesse. A qualunque livello si voglia lavorare, con loro è possibile. E il modo di fare matematica con loro punta a catturare l'interesse, la curiosità di un pubblico più ampio. La nostra scelta in questo articolo è stata quella di raccontare brevemente le loro vite e sottolineare alcuni dei tanti punti di collegamento, aldilà del fatto, naturale, che Pacioli raccolse e portò avanti l'eredità lasciata da Fibonacci tre secoli prima.

1. Cenni biografici

Ricordiamo brevemente la biografia di questi due matematici vissuti, il primo a cavallo tra XII e XIII secolo, il secondo tra il XV e XVI secolo.

I dati della biografia di Leonardo Pisano, figlio di Bonacci, noto come Fibonacci, sono scarsi e confusi: in particolare non sono note né la data di nascita, né quella di morte; è probabile sia vissuto tra il 1170 ed il 1240. Seguendo il padre, Guglielmo dei Bonacci, facoltoso mercante pisano e rappresentante dei mercanti della Repubblica di Pisa nella zona di Bugia in Algeria, passò alcuni anni in quella città, dove ebbe molti e proficui contatti con studiosi musulmani che stavano diffondendo nelle varie parti del mondo islamico lo studio dell'aritmetica e, più in generale, della matematica. Data la posizione del padre ebbe contatti con il mondo dei mercanti e apprese tecniche di matematica applicata sconosciute in Occidente. Affascinato ed incuriosito, per perfezionare queste conoscenze, Fibonacci viaggiò molto in Egitto, Siria, Sicilia, Grecia arrivando a Costantinopoli, alternando presumibilmente il commercio con gli studi matematici.

Molto dovette ai trattati di Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, (dal cui nome deriva la parola al-goritmo) di Abu Kamil Shujā' ibn Aslam e di altri maestri, persiani e arabi. Ritornato in Italia si impegnò a cercare di divulgare ciò che aveva appreso durante la sua permanenza in Oriente: la sua notorietà giunse anche alla corte dell'imperatore Federico II. Pubblicò diversi ed importanti trattati di matematica (il primo, *Liber Abbaci*, fu pubblicato nella sua prima stesura nel 1202). La sua fama cresceva e con essa l'interesse di Federico II: il matematico e l'imperatore si incontreranno a Pisa, presumibilmente nell'estate del 1226 (dopo questo incontro Fibonacci mise mano alla seconda e più completa stesura del suo *Liber Abbaci*). La Repubblica di Pisa gli assegnò un vitalizio che gli permise di dedicarsi completamente ai suoi studi.

“Considerando l'onore e il profitto della nostra città e dei cittadini, che derivano loro dalla dottrina e dai diligenti servigi del discreto e sapiente maestro Leonardo Bigollo nelle stime e ragioni d'abaco necessarie alla città e ai suoi funzionari, e in altre cose quando occorre, deliberiamo col presente atto che allo stesso Leonardo, per la sua dedizione e scienza e in ricompensa del lavoro che sostiene per studiare e determinare le stime e le ragioni sopraddette, vengano assegnate dal comune e dal tesoro pubblico venti lire a titolo di mercede o salario annuo, oltre ai consueti benefici, e che inoltre lo stesso [Leonardo] serva come al solito il comune pisano e i suoi funzionari nelle pratiche d'abaco”.

A Leonardo Fibonacci si devono molti trattati. Tra tutti vogliamo ricordare il “*Liber Abbaci*”, libro dedicato agli argomenti aritmetici ed alla introduzione delle “nove figure indiane” (le nove cifre) ed allo Zefiro (lo zero!). Nel XIII secolo la numerazione in uso era ancora quella romana: con la scrittura romana era complicato rappresentare numeri “grandi” ed era difficile eseguire le 5 operazioni (5? Sì, 5! Alle quattro operazioni che conosciamo veniva aggiunto... il raddoppio!). Far di conto con i numeri romani comportava l'utilizzo dell'abaco (o delle dita delle mani!). Molti matematici dell'epoca avevano il compito di sviluppare conti: spesso i matematici, gli astronomi, utilizzavano moltissimo tempo per venire a capo di semplici moltiplicazioni. La grande rivoluzione di Fibonacci fu l'uso della scrittura decimale con il valore posizionale. Come ogni innovazione vi furono estimatori ed oppositori. Iniziarono addirittura delle sfide di calcolo tra “algoritmisti” (seguaci di Fibonacci) ed “abacisti” (ossia coloro che utilizzavano l'antico abaco). Una Osservazione: il titolo del libro “*Liber ABBACI*”, non si riferisce all'abaco, dal latino, “abacus”, tavoletta, utilizzata per fare i conti, bensì *abbaco* - con due “b” - indica l'azione del far di conto.

E ora qualche breve cenno alla biografia di Fra' Luca Pacioli. Nato nel 1445 a Borgo Sansepolcro e lì morto nel 1517. Per capire quale fosse il suo approccio con la matematica utilizziamo le sue stesse parole, tratte dal “*De Divina Proportione*

“el sarto e calzolaio usano la geometria e non sanno cosa sia.

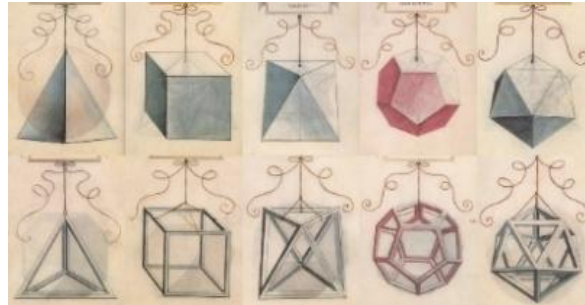
E li murari, legnaioli, fabri e ogni artefici usano la misura

e la proporzione e non la sanno, perocché commo altre volte è detto

tutto consiste nel numero, peso e misura”

Filosofo, matematico, teologo, appassionatissimo di scacchi e riconosciuto come il padre della ragioneria il frate francescano Luca Pacioli si dedicò in maniera assidua all'insegnamento della matematica e questa sua missione caratterizzò tutta la sua vita e lo mise in contatto con i maggiori esponenti della cultura del suo tempo: fu discepolo di Piero della Francesca, insegnante di Leonardo da Vinci, ebbe scambi culturali con Bramante e Leon Battista Alberti. In gioventù trascorse per motivi di studio diverso tempo a Venezia: questo soggiorno influenzò molto la sua vita futura. Da una parte entrò in contatto con il mondo dei mercanti, che grossi spunti ha dato alla sua opera, dall'altra entra in contatto con la spiritualità francescana e prende i voti come frate minore. Questi due processi non rimangono separati tra loro come avremo

modo di sottolineare più avanti. Come si è detto, Pacioli viaggia per l'Italia e la Dalmazia, sarà anche Napoli come insegnante in un ginnasio per circa 5 anni, insegnando sempre matematica a tutti i livelli, dai quelli elementari a quelli universitari. Suo allievo di eccellenza un "prattico" alquanto famoso, Leonardo da Vinci. Da questo sodalizio nascerà una edizione successiva del suo *"De Divina Proportione"*: in cambio degli insegnamenti ricevuti Leonardo disegnerà per Luca i famosi solidi Platonici. Insieme ne costruiranno dei modelli in legno.



Con Luca Pacioli la matematica diventa una vera e propria *philosophia prima*, fondamento e garanzia di tutto lo scibile, fruibile da tutti.

2. Fibonacci, Pacioli e la III missione

Dopo aver brevemente descritto le vite di questi due matematici, iniziamo ora a sottolineare i tratti che li accomunano, lo spirito che li anima.

2.1. La matematica da strada

Fibonacci e Pacioli hanno dedicato la loro vita non solo allo studio della matematica ma anche al suo insegnamento ed alla sua diffusione tra chi, apparentemente, interesse non aveva per questa, attirando l'attenzione con giochi da strada, indovinelli e "magie". Fra' Luca amava dire di sé che girava il mondo per "leggere" di matematica. Fibonacci nel suo testo propone una serie di giochi da risolvere con le proporzioni, Fra' Luca scrive *"De viribus quantitatis"*, una raccolta di giochi e curiosità matematiche e il *"De ludo scachorum"*.

Entrambi utilizzano l'aritmetica in \mathbb{Z} per fare una serie di giochi che vanno sotto il nome di "indovinare un numero pensato": si tratta di invitare una persona del pubblico a pensare ad un numero; dopo di che viene richiesto di fare alcune operazioni elementari al termine delle quali il "mago" indovina il numero inizialmente pensato. Riportiamo qui un esempio dovuto a Pacioli che si rifà appunto ad un problema posto precedentemente da Fibonacci.

Problema VIII: *Indovinare un numero con rotto pensato*

- a) Pensa ad un numero x
- b) Esegui $5(2x + 5) = y$
- c) Esegui $10(y + 10) = n$

Si risale al numero originario facendo

$$(n - 350)/100$$

Ovviamente $100 \cdot x = 10 \cdot (10 \cdot x + 25 + 10) - 350$: si tratta applicare l'associatività e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. In altri analoghi problemi vengono utilizzate le proprietà che caratterizzano quoziente e resto nella divisione euclidea per "indovinare" il numero pensato. Vale la pena di osservare che nel proporre tali esercizi di magia la "sceneggiatura" era parte essenziale.

Vi sono poi una serie di problemi molto interessanti dal punto di vista concettuale, in quanto aprono la strada alla risoluzione di nuovi problemi. Ne ricordiamo due. Il primo è dovuto a Fibonacci ed è relativo alla risoluzione di problemi con l'interpolazione lineare. Il problema si rifà ad un problema posto nel papiro di Ahmes (del 1600 a.c. circa, scritto in ieratico: questo papiro, conservato al British Museum di Londra, è lungo 3 metri contiene 84 problemi di geometria ed algebra). Il problema posto è determinare un numero che, aumentato della sua settima parte dia 19, ossia

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

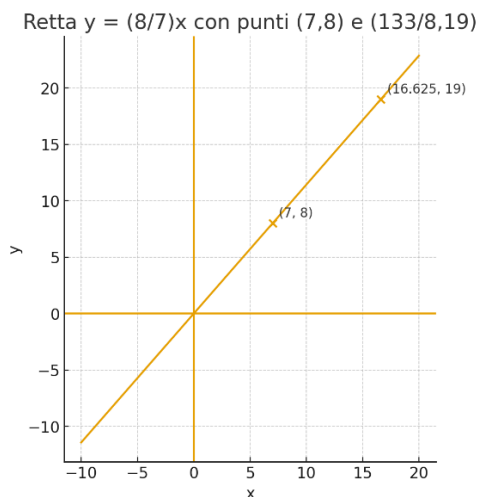
(attenzione: $x + \frac{1}{7}x$ per l'epoca è $x e \frac{1}{7}x$, vale a dire il "+" è sostituito da "e"!)

Fibonacci risolve tale problema adottando la "falsa posizione", vale a dire assegnando ad x un valore arbitrario, $x = 7$, ottenendo come risultato 8, invece di 19, da cui:

$$x : 7 = 19 : 8, \text{ da cui segue } x = 133/8$$

Quale è la spiegazione? Il problema, per noi, grazie al buon Cartesio (XVII secolo) si riduce alla rappresentazione della retta per l'origine avente coefficiente angolare $8/7$

$$y = x + \frac{1}{7}x = \frac{8}{7}x$$



Assegnando un valore arbitrario all'ascissa (nell'esempio $x = 7$) si determina il relativo valore per l'ordinata ($y = 8$) e dunque il punto $P(7,8)$: la retta sarà quindi individuata dai suoi punti $O(0,0)$ e $P(7,8)$. Ora non resta che determinare il valore dell'ascissa quando l'ordinata assume il valore di 19!

L'esempio che segue è dovuto a Pacioli ed è noto come "il problema di Josephus". Un gruppo di persone è disposto in cerchio. Seguendo un determinato schema di conteggio, alcune persone vengono sistematicamente rimosse dal cerchio. L'obiettivo è determinare la posizione (o le posizioni) iniziale che garantisce la sopravvivenza, ovvero l'ultima persona a rimanere esclusa dal processo di eliminazione. La soluzione $J(n,k)$ dipende da due parametri: n rappresenta il numero delle persone, k rappresenta il ciclo con cui le persone vengono eliminate. Facciamo un esempio della soluzione proposta quando $k=2$. In tal caso

1. Si consideri a tale che 2^a sia la più grande potenza di 2 minore di n

[Ad esempio sia $n = 13$: in tal caso $a = 3$ ($2^3 < 13 < 2^4$)]

2. Sia $l = n - 2^a$ [$l = 13 - 2^3 = 5$]

3. La posizione vincente è data da $2l + 1$ [$2 \cdot 5 + 1 = 11$]

Infatti (nel seguito vengono eliminati i numeri in nero)

I giro: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13

II giro: da 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 segue 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13

III giro: da 3 – 7 – 11 segue 3 – 7 – 11

IV giro: da 3 – 11 segue 3 – 11

Riassumendo:

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 1 – 3 – 5 – 7 –
9 – 11 – 13 – 3 – 7 – 11 – 3 – 11

Si è salvato il numero 11!

La formula generale viene data per ricorsività:

$$J(n, k) = [J(n - 1, k) + k - 1] \pmod{n} + 1$$

Se prima abbiamo visto che $J(13,2) = 11$, allora $J(14,2) = [(11 + 1)] + 1 = 13$ (avremmo potuto anche utilizzare la formula precedente: $l = 2 \cdot (14 - 8) + 1 = 13$). Oggi, il problema di Josephus è un classico esercizio di programmazione e algoritmica, utilizzato per illustrare concetti come liste concatenate circolari, ricorsione e aritmetica modulare.

Possiamo dire che con loro nasce davvero la III Missione!

2.2 Ponti tra culture diverse

Sia Fibonacci che Pacioli hanno affrontato un problema "linguistico", hanno creato un ponte tra culture diverse (Fibonacci tra Oriente ed Occidente, Pacioli tra "teorici" e "prattici"). Al giorno d'oggi possiamo affermare che una delle caratteristiche della Matematica è l'universalità del suo linguaggio. In qualunque parte del mondo voi siate la matematica ha un suo linguaggio, unico e riconoscibile. Ebbene, così non era nel XII secolo: in Europa si utilizzava la numerazione romana, estremamente poco maneggevole; in Oriente, invece, si utilizzavano i numeri arabi e si utilizzava il valore posizionale, sconosciuto in Occidente, ai simboli numerici. Il dialogo tra i due mondi era complesso. Fibonacci pose le basi per lo scambio culturale che ha portato alla matematica moderna e gettò le basi dell'algebra, della scienza e dell'ingegneria contemporanee. L'opera di Leonardo Fibonacci è paragonabile a quella di quei pionieri dell'informatica di massa che, negli anni Ottanta, hanno portato i computer fuori dalla stretta nicchia di «specialisti» che li utilizzavano e li ha resi accessibili a tutti. Come in quest'ultimo caso, anche il merito

dell'invenzione e dello sviluppo dei metodi descritti da Fibonacci nel "*Liber Abbaci*" va ad altre persone (in particolare, agli studiosi indiani ed arabi); il suo ruolo fu quello di «impacchettarli» e diffonderli. Lo studio e l'utilizzo della matematica da quel momento in poi non sono più prerogativa di una ristretta cerchia di studiosi né confinati da limiti geografici. Fibonacci prima con il suo "*Liber Abbaci*" e Pacioli poi non fanno altro (come se fosse poco!) che raccogliere, sistemare e rendere fruibile ciò che si sapeva di matematica. Non apportano nuovi risultati ma quello che si ottiene è spettacolare: per gli studiosi ed i curiosi le loro opere diventano i testi di riferimento.

Cerchiamo ora di capire quale fosse la situazione della matematica nel Rinascimento. Sono trascorsi tre secoli da quando Fibonacci aveva introdotto i numeri arabi in Europa e la matematica dell'Occidente si era aperta al dialogo con quella d'Oriente. Lo sviluppo della disciplina correva su due binari distinti: da una parte la matematica teorica, quella il cui studio derivava direttamente dai testi di Euclide, che si occupava, per esempio, della ricerca delle soluzioni per le equazioni di III e IV grado (è di pochi anni dopo la morte di Luca Pacioli la risoluzione di questo problema grazie a Tartaglia e Cardano); dall'altra la matematica dei così detti "prattici", coloro i quali usavano la matematica nel quotidiano, vale a dire mercanti, architetti, ingegneri. Il dialogo tra queste due realtà era molto scarso. La differenza di linguaggio separava questi due mondi: il primo studiava e si rapportava a testi in latino e greco, il secondo utilizzava solo il volgare. Dunque così come Fibonacci aveva "risolto un problema linguistico" introducendo in Occidente la numerazione araba e la scrittura polinomiale, così Fra' Luca capisce che i due mondi da collegare ora erano quello dei teorici ed il mondo dei "prattici". Cosa fa? Come un novello Dante Alighieri della Matematica nobilita la lingua volgare e traduce in volgare i testi base della matematica. In particolare traduce gli "*Elementi*" di Euclide e scrive due trattati di matematica e filosofia, "*Summa de arithmetica, geometria, proportionem et proportionalita*" e il "*De Divina Proportione*". In questo modo si amplia il dialogo tra il mondo dei letterati, che utilizzavano testi in latino e greco, e quello di chi parlava solo il volgare, ma usava la matematica tutti i giorni ed aveva sviluppato una serie di applicazioni concrete in ingegneria, astronomia, architettura, commercio: nasce così la matematica applicata moderna.

2.3 Il mondo dei mercanti

Il mondo dei mercanti ha un ruolo importante nella vita di entrambi. Ognuno, per il suo contributo, viene considerato "padre" di una parte della moderna ragioneria.

Per Fibonacci, figlio di un mercante, la realtà del commercio creò l'occasione per girare il mondo e osservare come veniva utilizzata la matematica. Con l'adozione del sistema decimale i mercanti e gli amministratori europei poterono eseguire calcoli con maggiore facilità e precisione. Questo rivoluzionò la gestione dei libri contabili, la riscossione delle imposte e la valutazione delle transazioni commerciali, migliorando enormemente l'efficienza delle operazioni economiche. Egli affrontò questioni pratiche, come il calcolo degli interessi e il valore attualizzato del denaro. Questi concetti sono centrali nella finanza aziendale moderna, dove il rapporto tra tempo e denaro è essenziale per la gestione finanziaria e per le decisioni di investimento. Il professor William N. Goetzmann della Yale School of Management, un esperto di economia e finanza, vede in Leonardo il primo teorizzatore di una primitiva forma di analisi del valore attuale, un metodo per confrontare i valori economici relativi di diversi flussi di pagamenti, tenendo conto del valore del denaro nel tempo. Per queste sue osservazioni Fibonacci viene riconosciuto come il padre della matematica finanziaria moderna.

Il periodo trascorso a Venezia permette a Pacioli di entrare in contatto con il mondo del commercio. I mercanti avevano affinato per i loro conti una tecnica "artigianale" redigendo due libri distinti, del DARE e dell'AVERE: Fra' Luca sistematizza il loro metodo ed introduce la PARTITA DOPPIA, di cui viene considerato il padre. Importante notare che la formalizzazione

da lui adottata è poco distante da quella che ancora oggi si utilizza. Da qui il nome di “padre della partita doppia” con cui viene ricordato dagli economisti. Ma non solo: le regole della mercatura sono regole matematiche. Fra’ Luca è convinto che per impararle sia necessario conoscere l’aritmetica e la geometria. Scrive dunque il “*Trattato*”, che ha come destinatari gli studenti perugini: in questo testo intende insegnare modalità e strumenti per un esercizio corretto della mercatura, nel rispetto dell’etica mercantile e delle regole e tecniche sociali ispirate alla morale cristiana e alla pratica degli scambi di francescana memoria. È la mercatura etica, anticipatrice della “banca etica”, il modello di riferimento.

2.4 La sequenza di Fibonacci e la sezione aurea

La sequenza di Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13,21 ...) “nasce” in maniera quasi casuale come risoluzione ad un quesito proposto da Federico II, noto a tutti come il famoso “*quesito dei conigli*”.

Nel 1223 Federico II indisse una gara matematica ponendo diversi quesiti. Tra questi il famoso “*quesito dei conigli*”:

«Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.»

Fibonacci, vinse la gara con una risposta così rapida da far persino sospettare che il torneo fosse truccato. Queste le condizioni che definiscono il problema:

1. Nessun coniglio muore.
2. Ogni coppia di conigli genera solamente un'altra coppia ogni mese.
3. I conigli hanno bisogno di un mese per diventare fertili.
4. Una volta fertili continueranno a generare una coppia al mese.

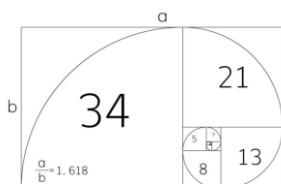
La successione di Fibonacci fornisce la soluzione del problema posto indicando quanti saranno i conigli nel mese n –esimo (indichiamo con F_n tale numero): è una successione di numeri naturali definita per ricorsività (ed è la prima volta che la ricorsività viene formalizzata!):

$$F_0 = F_1 = 1, \forall n \geq 2 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

da cui:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 ...

La sequenza di Fibonacci porta alla costruzione della spirale di Fibonacci



il raggio di curvatura della spirale corrisponde ai numeri della sequenza di Fibonacci

È noto a tutti in quanti campi la sequenza di Fibonacci si possa ritrovare: in natura contando i petali dei fiori, nella disposizione dei semi in un girasole, nella forma delle onde, di un uragano, di una nebulosa, oppure per individuare il punto corretto in cui porre il soggetto di una foto o di un quadro. Ci piace ricordare come tale sequenza abbia aiutato a fare previsioni e ad individuare Nettuno nel sistema solare: in Astronomia si era osservato che tutti i pianeti interni

distano dal Sole secondo proporzioni riconducibili alla successione (Mercurio 1, Venere 2, Terra 3, Marte 5); e quelli esterni distano ugualmente da Giove (Saturno 1, Urano 2,??? 3, Plutone 5): dunque la posizione corrispondente alla distanza 3 da Giove non era coperta da nessun pianeta? Vediamo cosa scrive Feynman nel suo "La legge fisica":

"Quando una legge è giusta, essa può essere usata per trovarne un'altra. Se noi abbiamo fiducia in una legge, e qualcosa sembra essere sbagliato, essa può suggerirci un altro fenomeno. [...] Giove, Saturno e Urano erano i più grandi pianeti allora conosciuti, e fu calcolata la piccola differenza dell'orbita reale dell'ellisse perfetta di Keplero, causata dall'attrazione degli altri pianeti. Alla fine dei calcoli e delle osservazioni fu notato che Giove e Saturno si muovevano secondo le previsioni, mentre Urano faceva qualcosa di bizzarro. Un'altra occasione in cui le leggi di Newton avrebbero potuto esser colte in fallo; ma coraggio! Due astronomi, Adams e Leverrier, che fecero questi calcoli indipendentemente e quasi esattamente nello stesso tempo, suggerirono che il moto di Urano fosse dovuto a un pianeta non ancora visto, e scrissero lettere ai rispettivi Osservatori dicendo: "Puntate il vostro telescopio, guardate là e troverete un pianeta". Disse uno degli Osservatori: "Assurdo, questo tipo se ne sta lì con carta e matita e viene a dirci dove trovare un pianeta nuovo". ... e trovarono Nettuno!"

Diretta "figlia" della sequenza di Fibonacci è la sezione aurea φ , anche nota come rapporto aureo o numero aureo o costante di Fidia o proporzione divina, nell'ambito delle arti figurative e della matematica, indica il numero irrazionale 1,6180339887... ottenuto effettuando il rapporto fra due lunghezze disuguali delle quali la maggiore a è medio proporzionale tra la minore b e la somma delle due precedenti ($a + b$); vale a dire:

$$\varphi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

e dunque φ risulta la soluzione (positiva) di

$$x^2 - x - 1 = 0$$

da cui si ottiene

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

Il numero aureo φ , con la sua "bellezza", ha ispirato anche poesia: il testo che segue si deve a Paul Bruckman:

La media aurea non è affatto banale

Tutt'altra cosa che un numero irrazionale.

Capovolta, pensate un po',

Resta se stesso meno l'unità.

$$\left(\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1\right)$$

Se poi di uno la aumentate

Quel che otterrete, vi assicuro, è il quadrato.

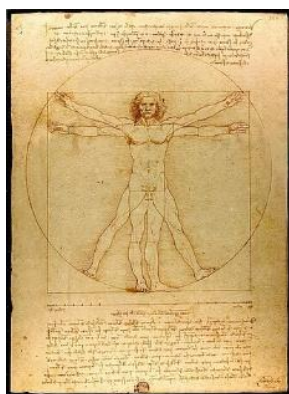
$$(\varphi + 1 = \varphi^2)$$

Quale sia la relazione tra la successione di Fibonacci e la sezione aurea, di cui Luca Pacioli si è molto interessato, è nota: se indichiamo con F_n l'ennesimo termine della serie di Fibonacci φ coincide con il limite per $n \rightarrow \infty$ del rapporto tra F_{n+1} e F_n , vale a dire:

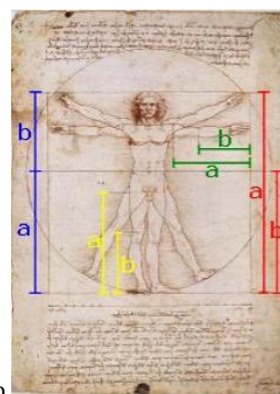
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

L'interesse di Luca Pacioli per la sezione aurea φ , nota anche come numero di Fidia, è giustificata dal forte interesse di Pacioli per il mondo artistico. Va ricordato che la sezione aurea doveva essere nota sin dall'antichità ma è Pacioli che la formalizza e la diffonde tra i suoi contemporanei, tra questi spicca Leonardo da Vinci che uso magistrale ne fece!

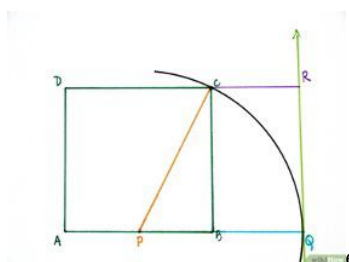
Un esempio celebre è quello del l'uomo vitruviano, dove la proporzione tra l'altezza dell'uomo e la distanza tra l'ombelico e il suolo è proprio la magia φ di Fidia:



da notare che l'uomo iscritto in un triangolo aureo



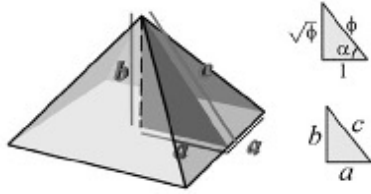
Vale la pena di osservare che così come nel passato φ era stata protagonista, consapevole o meno, dell'arte e della bellezza, da questo punto in poi ne sarà protagonista riconosciuta ed inseguita in tutta l'evoluzione dell'arte. Basti pensare al *Modulor* di Le Corbusier, ai rettangoli di Mondrian, alle tassellature di Penrose. Guardando al passato ritroviamo φ in imponenti opere come la piramide di Cheope nella piana di Gizia, dove il rapporto tra il semilato e l'altezza della piramide è proprio φ , così come φ è il rapporto tra i due lati degli altari greci o tra le misure del Partenone (rettangolo aureo).



ed ecco il Partenone con le sue magiche proporzioni



Per le piramidi potrebbe sembrare un caso che esse rispettino queste importanti proporzioni, se non fosse che... Erodoto nel II libro delle "Storie" racconta che i sacerdoti egiziani volevano che l'area di ciascuna faccia triangolare fosse uguale a quella del quadrato avente per lato l'altezza della piramide stessa, misurata a piombo dall'apice del monumento sino al terreno. Vale a dire le misure del triangolo così identificato dovevano essere $(1, \varphi, \sqrt{\varphi})$



E dunque tale proporzione un caso non era!

Potremmo continuare ancora a lungo ma ci fermiamo qui con una immagine che, forse, più di tutte suggella il legame tra Fibonacci e Fra' Luca



Riferimenti bibliografici

AMEDEO AGOSTINI, De Viribus Quantitatis di Luca Pacioli, Periodico di Matematiche, vol. IV, 1924, pp. 165 – 192

GAVAGNA VERONICA, intervento nell'ambito del CONVEGNO MATHESIS 2023

ATTI del convegno "CELEBRAZIONI CINQUECENTENARIO DE DIVINA PROPORZIONE 1509 – 2009", PACIOLI 500 ANNI DOPO

LEONARDO FIBONACCI, *Liber Abbaci*

LUCA PACIOLI, *De viribus quantitatis*

LUCA PACIOLI, *Summa de arithmetica*